

文章编号: 1000-8055(2005) 06-0964-05

IN738LC 材料 Chaboche 热粘塑性本构模型的隐式 Euler 格式

王庆五, 杨晓光, 石多奇
(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

摘要: 为了提高 Chaboche 模型的数值积分效率, 推导了该模型的 Euler 隐式积分格式, 针对 IN738LC 材料, 将该积分格式编写成 FORTRAN 程序, 利用通用有限元分析软件 Marc 的用户子程序接口 HYPELA2, 将该隐式积分格式与有限单元法结合起来。对实验进行了数值模拟, 并将隐式算法和显式算法与实验结果作了对比, 结果发现隐式算法是合理的, 比显式算法收敛性要好。

关键词: 航空、航天推进系统; 热粘塑性; 本构模型; 隐式 Euler 方法

中图分类号: V231.91

文献标识码: A

Implicit Euler Form of Chaboche Thermal Viscoplastic Model of IN738LC Material

WANG Qing-wu, YANG Xiao-guang, SHI Duo-qi

(School of Jet Propulsion,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: In order to improve the efficiency of numeric integral of Chaboche constitutive model, backward Euler integration method, which also called implicit Euler integration method, of Chaboche model was brought forward. As an example, material IN738LC was used. Based on the backward Euler integration equation, FORTRAN programming format was used. Such a program was linked with FEM by user's program interface HYPELA2 in MSC. Marc of a general FEM software. As a result, backward Euler method applied to Chaboche model could be used for structural analysis. A numerical result was given. Comparison was made between the numerical result and the experimental one. Comparison between the result of backward Euler method and the one of forward Euler method was made, too. It is found that the backward Euler method is accurate and has better convergency than the forward one.

Key words: aerospace propulsion system; thermal viscoplasticity; constitutive equations; backward Euler integration

IN738LC 镍基高温合金具有一种所谓的 Bi-modal 的组织^[1], 使得 IN738LC 合金具有较好的综合性能, 被广泛地应用于飞机的涡轮静子叶片

材料。目前各种高温合金的本构方程都以偏微分的形式给出, 这些偏微分在实际计算中都需要进行积分运算, 积分运算的效率对结构分析有很大

收稿日期: 2004- 11- 15; 修订日期: 2005- 05- 09

作者简介: 王庆五(1978-), 男, 湖北襄樊人, 北京航空航天大学能源与动力工程学院博士生, 主要从事航空发动机结构强度的研究。

的影响。探索收敛性好效率高的积分算法显得非常重要。

本文针对 Chaboche 模型推导隐式的 Euler 积分叠代格式, 针对 IN738LC 材料, 给出了具体的算法。

1 IN738LC 材料的 Chaboche 模型

研究表明, IN738LC 镍基高温合金在等温非比例拉扭循环载荷下, 没有附加硬化。可以采用如下形式的 Chaboche 模型:

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ij}^e : \dot{\epsilon}_{ij} = D_{ij}^e \cdot (\dot{\epsilon}_{ij}^n - \dot{\epsilon}_{ij}^p) \quad (1)$$

其中: D_{ij}^e 中弹性各向同性本构张量, $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ 表示弹性应变率张量, $\dot{\epsilon}_{ij}^n$ 表示不是由于温度变化产生的机械应变率张量, $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 表示非弹性应变率张量。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^n = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2)$$

$\dot{\epsilon}_{ij}$ 表示总的应变率, 包括由于温度变化产生的应变率和机械应变率, $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 表示由于温度变化产生的应变率。在一段时间内, 温度由 T_0 变化到 T , 由于温度变化产生的应变为:

$$\epsilon_{ij}^h = \alpha(T)(T - T_0) \quad (3)$$

式中: $\alpha(T)$ 是热膨胀系数。

在 Chaboche 模型中定义粘塑性势为:

$$\Omega = \frac{K}{n+1} < \sigma/K >^{n+1} \quad (4)$$

其中: $< >$ 表示麦考尔尼括号, 式中 σ 称为过应力或粘性应力, K 是拖应力。

在粘塑性理论中, 定义在偏应力空间中真实应力状态与它在真实弹性域的投影之间的距离为屈服函数, 表示为:

$$f = \sigma_e = J_2(\sigma_{ij} - X_{ij}) - R \quad (5)$$

式中: R 称为各向同性硬化函数, J_2 为偏量的第二不变量, X_{ij} 称为背应力。

非弹性应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}^n$ 与累积塑性应变率 p° 的关系为:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^n = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} \frac{\sigma_{ij}' - X_{ij}'}{J_2(\sigma_{ij} - X_{ij})} = \frac{3}{2} p^\circ \frac{\sigma_{ij}' - X_{ij}'}{J_2(\sigma_{ij} - X_{ij})} \quad (6)$$

$$p^\circ = \frac{1}{(3/2) \dot{\epsilon}_{ij}^n : \dot{\epsilon}_{ij}^n} = \frac{1}{< [J_2(\sigma_{ij} - X_{ij}) - R]/K >^n} \quad (7)$$

各向同性变量 R 可以写成:

$$\dot{R} = b(Q - R)p^\circ + \frac{\partial R}{\partial T} \dot{T} \quad (8)$$

其中, $\frac{\partial R}{\partial T} \dot{T}$ 是由于温度变化引起的增量, R 在开

始时取得初值:

$$R(t=0) = k(T_0) \quad (9)$$

定义 $\Phi(p)$ 为各向同性硬化对运动变量的影响。

$$\Phi(p) = \Phi_\infty(T) + (1 - \Phi_\infty) e^{-w p} \quad (10)$$

式中: w 是材料参数。

每个运动硬化表示为:

$$X_{ij}^{(k)} = \frac{2}{3} c_k a_k \dot{\epsilon}_{ij}^n - c_k \Phi(p) X_{ij}^{(k-1)} p^\circ - \beta_k \left[J_2(X_{ij}^{(k)}) \right]^{r_k} X_{ij}^{(k-1)} \quad (11)$$

式中: c_k, a_k, β_k, r_k 是材料参数。

总的运动硬化表示为:

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^n X_{ij}^{(k)} \quad (12)$$

2 积分方法

数值积分方法的选择强烈地依赖模型的数值特性, 该特性又由演化方程的结构决定, 例如, 流场法则和硬化法则, 材料参数和载荷条件等。

最简单的方法是 Euler 方法, 一般形式的 Euler 方法可以写成:

$$Y_{t+\Delta t} \theta + Y_t(1 - \theta) - Y_{t-\Delta t}(1 - \theta) = hf(Y, t) \quad (13)$$

式中: Y 是系统的近似解向量, $\theta \in [0, 1]$ 。 $\theta = 0$ 意味着完全显式的方法, $\theta = 1$ 是完全隐式的方法。

Olschewski 和 Noack H D 的研究表明: 带有自动步长控制和合理的误差评定的 Euler 积分算法具有非常高的效率, 特别是用于有限单元计算时更是如此。更高级的计算方法必须存储更多的数据, 这会导致有限单元计算费用的增加, 在这方面 Euler 方法具有极大的优势。本文选用后退的 Euler 积分技术来求解 Chaboche 模型的演化方程, 不讨论自动步长和误差的选取。

后退的 Euler 方法是一阶的完全隐式方法, 由近似的后退 Euler 差分来定义:

$$y^{(t_{n+1})} = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \quad (14)$$

为简单起见, 在下面的式子中采用:

$$^n y = y(t_n), \quad ^{n+1} y = y(t_{n+1})$$

为了获得本构的驱动, 而在驱动中数值叠代要用标量的形式而不是矢量形式, 即 Δp , 因此使用这一方法而且要对以下方程进行改写。使用标量变量进行叠代会使计算简单, 而且从一维形式转到一般的应力状态也很直接。给定了应变增量 $\Delta \epsilon$ 和时间步 Δt 之后, 本构驱动会从时间 $t = t_n$ 的

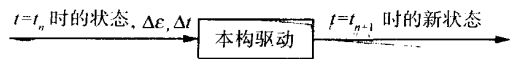


图 1 本构驱动

Fig. 1 Constitutive driver

给定状态计算 $t = t_{n+1}$ 的新的状态, 见图 1。

由于在金属中塑性应变假定为纯偏量, 所以可以把式(6)的积分形式写成:

$${}^{n+1}\sigma'_{ij} = {}^{n+1}\sigma'_{ij} - \frac{3G\Delta p}{J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij})} ({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}) \quad (16)$$

这里引入了弹性尝试应力:

$${}^{n+1}\sigma'_{ij} = {}^n\sigma'_{ij} + 2G\Delta\epsilon'_{ij} \quad (17)$$

使用后退的 Euler 公式(14), 方程(8)、(10)的积分形式为:

$${}^{n+1}R - {}^nR = b(Q - {}^{n+1}R)\Delta p \quad (18)$$

$$\Phi({}^{n+1}p) = \Phi_\infty + (1 - \Phi_\infty)e^{-w^{n+1}p} \quad (19)$$

方程(11)化为:

$${}^{n+1}X_{ij}^{(k)} - {}^nX_{ij}^{(k)} = ckak\Delta p \frac{{}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}}{J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij})} - ck\Phi({}^{n+1}p)({}^{n+1}X_{ij}^{(k)} - {}^nX_{ij}^{(k)})\Delta p - \Delta t\beta_k J_2^{r_k-1}({}^{n+1}X_{ij}^{(k)})({}^{n+1}X_{ij}^{(k)}) \quad (20)$$

方程(12)中的分量可以相加, 给出总的运动硬化, 表示为:

$${}^{n+1}X_{ij} = \sum_{k=1}^n X_{ij}^{(k)} \quad (21)$$

组合(16)式和(20)式, 并取 J_2 的形式, 可以得到:

$$J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}) = J_2 \left\{ {}^{n+1}\sigma'_{ij} - 3G\Delta p \frac{{}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}}{J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij})} - \left[{}^nX_{ij} + \Delta p \frac{{}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}}{J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij})} \sum_k akck - \Delta p \Phi({}^{n+1}p) \cdot \sum_k c_k^{n+1}X_{ij}^{(k)} - \Delta t \sum \beta_k J_2^{r_k-1}({}^{n+1}X_{ij}^{(k)})({}^{n+1}X_{ij}^{(k)}) \right] \right\} \quad (22)$$

该式是下面将用到的 J_2 形式的表达式。最后可以将(6)式的非弹性应变写成:

$${}^{n+1}\epsilon'_{ij} - {}^n\epsilon'_{ij} = \frac{3}{2} \Delta p \frac{{}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}}{J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij})} \quad (23)$$

屈服函数 ${}^{n+1}f$ 方程(5)可以写成:

$${}^{n+1}f = J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}) - R \quad (24)$$

现在具有上面所有方程的后退 Euler 公式, 这样可以开始求解过程。

3.2 判断响应

首先应当判断处于弹性响应还是非弹性响应, 即处于屈服面以内还是之外。弹性响应定义为 $f \leq 0$, 非弹性响应定义为 $f > 0$, f 是由式(5)和式(24)获得屈服面。

这样来进行: 假设最初处于弹性响应, 即 $\Delta p = 0$ 并且积分 ${}^{n+1}X^{(k)}$ 和 ${}^{n+1}R$ 的方程。然后将这些方程插入到方程(22)中, 再将方程(22)插入方程

3 叠代格式

3.1 后退 Euler 公式

原理基本的思想由 Runesson 提出, 可以获得以下方程。

对方程(1)进行积分可以得到:

$${}^{n+1}\sigma_{ij} = {}^n\sigma_{ij} + D_{ij}^e : (\Delta\epsilon_{ij}^n - \Delta\epsilon_{ij}^p) \quad (15)$$

$${}^{n+1}\sigma'_{ij} = {}^n\sigma'_{ij} + 2G\Delta\epsilon'_{ij} \quad (17)$$

$${}^{n+1}R - {}^nR = b(Q - {}^{n+1}R)\Delta p \quad (18)$$

$$\Phi({}^{n+1}p) = \Phi_\infty + (1 - \Phi_\infty)e^{-w^{n+1}p} \quad (19)$$

$${}^{n+1}X_{ij}^{(k)} - {}^nX_{ij}^{(k)} = ckak\Delta p \frac{{}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}}{J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij})} - ck\Phi({}^{n+1}p)({}^{n+1}X_{ij}^{(k)} - {}^nX_{ij}^{(k)})\Delta p - \Delta t\beta_k J_2^{r_k-1}({}^{n+1}X_{ij}^{(k)})({}^{n+1}X_{ij}^{(k)}) \quad (20)$$

$${}^{n+1}X_{ij} = \sum_{k=1}^n X_{ij}^{(k)} \quad (21)$$

$$J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}) = J_2 \left\{ {}^{n+1}\sigma'_{ij} - 3G\Delta p \frac{{}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}}{J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij})} - \left[{}^nX_{ij} + \Delta p \frac{{}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}}{J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij})} \sum_k akck - \Delta p \Phi({}^{n+1}p) \cdot \sum_k c_k^{n+1}X_{ij}^{(k)} - \Delta t \sum \beta_k J_2^{r_k-1}({}^{n+1}X_{ij}^{(k)})({}^{n+1}X_{ij}^{(k)}) \right] \right\} \quad (22)$$

该式是下面将用到的 J_2 形式的表达式。最后可以将(6)式的非弹性应变写成:

$${}^{n+1}\epsilon'_{ij} - {}^n\epsilon'_{ij} = \frac{3}{2} \Delta p \frac{{}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}}{J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij})} \quad (23)$$

屈服函数 ${}^{n+1}f$ 方程(5)可以写成:

$${}^{n+1}f = J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}) - R \quad (24)$$

(24)中以确定屈服函数 ${}^{n+1}f$ 的符号, 这样就能确定该用什么响应了。

这样方程(24)就变为:

$${}^{n+1}f(\Delta p) = J_2({}^{n+1}\sigma'_{ij} - {}^{n+1}X'_{ij}) - {}^{n+1}R \quad (25)$$

这里需要 ${}^{n+1}X^{(k)}$ 和 ${}^{n+1}R$ 。利用 $\Delta p = 0$, 并用牛顿叠代法可以获得 ${}^{n+1}X^{(k)}$, 利用 $\Delta p = 0$, 可以获得 ${}^{n+1}R$, 现在我们可以通过考查屈服函数 ${}^{n+1}f$ (方程(24))的符号来最终判定是弹性响应还是塑性响应。

同时需要方程(22), 加入条件 $\Delta p = 0$, 变为:

$$J_2(n^{+1}\sigma_{ij} - n^{+1}X_{ij}) = J_2\left[n^{+1}\sigma_{ij} - nX_{ij} + \Delta t \sum_k \beta_k J_2^{r_k-1} \left(n^{+1}X_{ij}^{(k)}\right)^{n^{+1}} X_{ij}^{(k)}\right] \quad (26)$$

从方程(24)可以得到:

$$\begin{aligned} n^{+1}(\Delta p = 0) &= J_2(n^{+1}\sigma_{ij} - n^{+1}X_{ij}) - R = \\ J_2\left[n^{+1}\sigma_{ij} - nX_{ij} + \Delta t \sum_k \beta_k J_2^{r_k-1} (n^{+1}X_{ij}^{(k)})^{n^{+1}} X_{ij}^{(k)}\right] - R \end{aligned} \quad (27)$$

利用上面的方程, 从下列条件可以获得响应的种类。

如果 $n^{+1}f(\Delta p = 0) \leq 0$, 则处于弹性响应;

如果 $n^{+1}f(\Delta p = 0) > 0$, 则处于非弹性响应。

3.3 弹性响应

在弹性响应即 $\Delta p = 0$ 情况下, 内变量由下面的式子更新:

$$n^{+1}\sigma_{ij} = n^{+1}\sigma_{ij} \quad (28)$$

$$n^{+1}X_{ij}^{(k)} = \frac{J_2(n^{+1}X_{ij}^{(k)})}{J_2(nX_{ij}^{(k)})} nX_{ij}^{(k)} \quad (29)$$

$$n^{+1}X_{ij} = \sum_k n^{+1}X_{ij}^{(k)} \quad (30)$$

$$n^{+1}R = nR \quad (31)$$

$$n^{+1}\epsilon_{ij}^{\text{in}} = n\epsilon_{ij}^{\text{in}} \quad (32)$$

3.4 非弹性响应

处于非弹性响应情况时, 必须首先计算塑性因子 Δp , 当 Δp 获得了, 就可以更新所有的内变量。获得 Δp 的方法是取得关于 Δp 的方程, 然后用牛顿叠代法^[2]求解该方程。关于 Δp 的方程是

通过以下方法获得。

获得 Δp 后, 就能够用 Δp 更新内变量了, 要更新内变量首先必须得到 $n^{+1}\sigma'_{ij}$ 和 $n^{+1}X_{ij}^{(k)}$ 的表达式。并且我们需要组合表达式 $(n^{+1}\sigma'_{ij} - n^{+1}X_{ij}')$, 经过推导可以得到下方程:

$$\left[n^{+1}\sigma'_{ij} - \sum_k a_{X^{(k)}} nX_{ij}^{(k)} \right] = \left[\frac{J_2(n^{+1}\sigma_{ij} - n^{+1}X_{ij}^{(k)}) + 3G\Delta p + \Delta p \sum_k a_{X^{(k)}} a_{ck}}{J_2(n^{+1}\sigma_{ij} - n^{+1}X_{ij})} \right] \cdot (n^{+1}\sigma'_{ij} - n^{+1}X_{ij}') \quad (33)$$

$$n^{+1}\sigma'_{ij} - n^{+1}X_{ij}' = \frac{J_2(n^{+1}\sigma_{ij} - n^{+1}X_{ij})}{J_2\left[n^{+1}\sigma_{ij} - \sum_k a_{X^{(k)}} nX_{ij}^{(k)}\right]} \left(n^{+1}\sigma'_{ij} - \sum_k a_{X^{(k)}} nX_{ij}^{(k)} \right) \quad (34)$$

这一表达式插入到方程(16)中就可以给出更新了的应力:

$$n^{+1}\sigma'_{ij} = n^{+1}\sigma'_{ij} - 3G\Delta p \frac{n^{+1}\sigma'_{ij} - \sum_k a_{X^{(k)}} nX_{ij}^{(k)}}{J_2\left[n^{+1}\sigma_{ij} - \sum_k a_{X^{(k)}} nX_{ij}^{(k)}\right]} \quad (35)$$

还可以给出更新了的背应力:

$$n^{+1}X_{ij}^{(k)} = a_{X^{(k)}} a_{ck} \Delta p \frac{n^{+1}\sigma'_{ij} - \sum_k a_{X^{(k)}} nX_{ij}^{(k)}}{J_2\left[n^{+1}\sigma_{ij} - \sum_k a_{X^{(k)}} nX_{ij}^{(k)}\right]} + a_{X^{(k)}} nX_{ij}^{(k)} \quad (36)$$

(35)和(36)两个方程加上下面列出的内变量, 将给出完整的解答。

$$n^{+1}R = a_R(bQ\Delta p + nR) \quad (37)$$

$$\Phi(n^{+1}p) = \Phi_\infty(T) + (1 - \Phi_\infty)e^{-w n^{+1}p} \quad (38)$$

$$n^{+1}\epsilon_{ij}^{\text{in}} - n\epsilon_{ij}^{\text{in}} = \frac{3}{2} \Delta p \frac{n^{+1}\sigma'_{ij} - n^{+1}X_{ij}'}{J_2(n^{+1}\sigma_{ij} - n^{+1}X_{ij})} \quad (39)$$

无论是弹性响应还是塑性响应由于温度变化引起的变化都在上述叠代完成后附加上去,即这部分不参与叠代。

4 结果和结论

要将该叠代算法用于实际分析,采用有限单元计算方法和程序,计算中选用通用有限元分析软件 Marc 2003,应用它的 HYPELA2 用户子程序,对 IN738LC 材料试件的模拟计算,对简单加载情况进行计算,控制压力时的应变响应模拟(650℃,波形 1-1-1-1, $\sigma_{max}=975\text{ MPa}$),结果^[3]见图 2,可以认为数值模拟结果与实验结果能够较好地吻合。

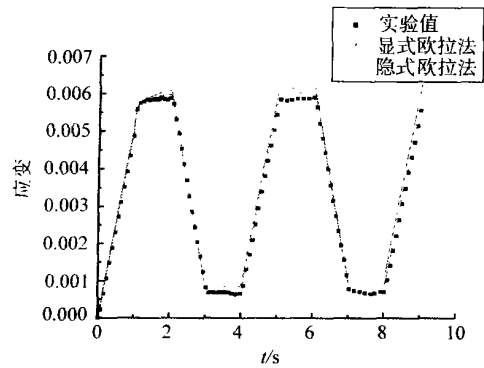


图 2 控制压力时的应变响应模拟

(650℃, 波形 1-1-1-1, $\sigma_{max}=975\text{ MPa}$)

Fig. 2 Simulated Strain's respouse under controlled stress

(650℃, Load form 1-1-1-1, $\sigma_{max}=975\text{ MPa}$)

考察单个单元单调拉伸(最大应变为 0.03,应变率 0.01)时的计算情况,分为 3, 15, 17, 23, 30 步将隐式算法与显式算法分别比较。表 1 列出了各种步长所花费时间。

表 1 各种步长所花费时间(s)

Table 1 Time spent with several step length (s)

步数	显示方法	隐式方法
3	3	3
15	5	3
17	5	3
23	5	3
30	6	3

在其它计算条件下,进一步将该隐式方法与 Euler 显式的积分方法的计算结果相比,发现它的准确性和收敛性(速度)都大大提高,这说明编写该隐式算法是成功的。

参考文献:

- [1] Wahi R P, Wollen H Berger. Quantitative Gefueanaly Seder Legierung IN738LC Nach Hoch Temperature Bean Spruchung[C]. In: *Schaufe I Und Scheiben in Gasturbingn, Werk Stoff und Bauteilver Halten, SFB339, TP B41, Ed. Feller H G, Technische Universität Berlin*, 1991: 267.
- [2] 杨庆扬,王能超.数值分析[M]. 湖北 武汉: 华中理工大学出版社, 1982.
- [3] 石多奇.热端部件材料先进粘塑性本构理论与高温多轴疲劳理论研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2004.